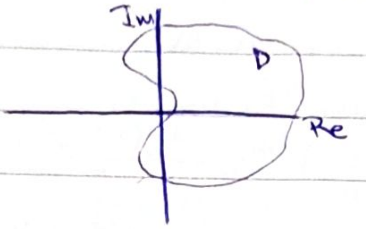
29/03/2019

<u>Είδαμε</u>: $Arg : \mathbb{C} \setminus \cancel{(-\infty, 0]}\ \{0\} \to (-\pi, \pi]$ $\quad$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

συνεχής (και ασυνεχής $\forall\, x \in (-\infty, 0]$: $\forall\, x \in (-\infty, 0)$ άλμα κατά 2π $\quad x = 0$ η ασυνέχεια δεν διορθώνεται).

$\Rightarrow \forall\, D \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$: $Arg/_D$ είναι συνεχής



<u>Παράδειγμα</u>: Η λογαριθμική συνάρτηση : $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$\log z = \ln|z| + i\, Arg z \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (επιρροή της Arg) $\log$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και ασυνεχής $\forall\, x \in (-\infty, 0)$ (άρα πάλι έχουμε άλμα του φανταστικού μέρους) και για $\underset{\neq 0}{z_n} \to 0$ έχουμε ότι $\log z_n \to \infty$

<u>Παράδειγμα</u>: Η συνάρτηση της λ-δύναμης που την είχαμε φέρει:

$z \longmapsto z^{\lambda} = e^{\lambda \log z}$, $\quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C} \Longrightarrow$

$\xrightarrow[\text{παράδειγμα}]{\text{προηγούμενο}}$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και <u>γενικά</u> ασυνεχής $\forall\, x \in (-\infty, 0)$

<u>Όμως</u> για επιλεγμένα (συγκεκριμένα) $\lambda \in \mathbb{C}$, η συνάρτηση μπορεί να επεκτείνεται συνεχώς σε όλο το $\mathbb{C}$, π.χ. για $\lambda = n \in \mathbb{N}$, ή σε όλο το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, π.χ. για $\lambda = -n$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

[αφού βλ. προηγούμενα παραδείγματα ή άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων, η $z \longmapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$ και η $z \longmapsto \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$]

Γιατί συμβαίνει αυτό;

Γιατί δεν ισχύει για $\lambda \neq \pm n$, $n \in \mathbb{N}$;

Ας δούμε τι γίνεται με τη συνάρτηση:

$$z \longmapsto \underbrace{\sqrt{z}}_{z^{1/2}} = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg} z}{2}}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \ \sqrt{0} = 0$$

Σίγουρα συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ (λόγω και της συνέχειας της συνάρτησης $\sqrt{\cdot} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$)

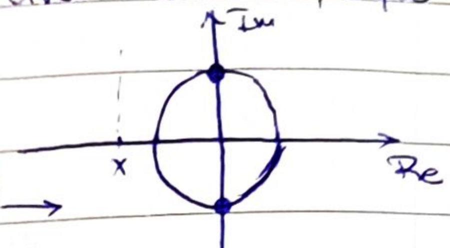
Επίσης, συνεχής στο 0, αφού για $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0 \iff |\sqrt{z}| = \sqrt{|z_n|} \to 0$.

Όμως, για $x \in (-\infty, 0)$ η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, αφού

π.χ. για $z_n = x \pm \frac{i}{n}$, $n \in \mathbb{N}$,

έχουμε: $z_n \to x$ και (λόγω του ορισμού) $\sqrt{z_n} = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/4} e^{\frac{i\,\mathrm{Arg}(x \pm \frac{1}{n})}{2}} \to$

με το 2 θα μας κόψει τον κύκλο σε δύο κομμάτια, κτλ.



$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{|x|}\, e^{i\frac{\pm\pi}{2}} = \pm i \sqrt{|x|}$$

[ενώ για $z^1 = |z| \cdot e^{i\frac{\mathrm{Arg} z}{1}} \xrightarrow[z_n \to x \in (-\infty,0)]{} |x|\, e^{\underbrace{i(\pm\pi)}_{\text{διαφορετικά}}}$]

με το 1 θα μας αφήσει ολόκληρο τον κύκλο — όχι διαφορετικά

Συνεπώς, π.χ. για $\lambda = \frac{1}{2}$, «χαλάει» η 2π-περιοδικότητα της e^{iy}, ενώ για $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$, «δεν χαλάει».

«Ηθικό» Δίδαγμα: Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα, όπου υπήρχε ασυνέχεια, αυτή ήταν στο $(-\infty, 0]$. Γιατί:

Αυτό οφείλεται στον μονοσήμαντο ορισμό του (κύριου) ορίσματος (δηλ. στην κατασκευή μιας 1-1 και επί απεικόνισης από το $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ στο $(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$.

Το να είναι μονοσήμαντη αυτή η απεικόνιση, σημαίνει να μπορώ:

$$z = x+iy = (x,y) \xleftrightarrow{\text{να πάω}} (r,\varphi)$$

το οποίο οδηγεί στην ασυνέχεια του κύριου ορίσματος:

Arg (όπως το ορίσαμε, προσπαθώντας να διατηρήσουμε την συνέχειά του σε όσο μεγαλύτερο τμήμα του $\mathbb{C}$ μπορούμε) στο $(-\infty, 0)$.

Αν ορίζαμε μονοσήμαντα τη μετάβαση: $(x,y) \longleftrightarrow (r,\varphi)$ με $\varphi \in [0, 2\pi)$, το ίδιο πρόβλημα (ασυνέχεια της φ) θα υπήρχε στο $(0,\infty)$

Περί της «μοναδικότητας» του απείρου ∞ (και στερεογραφική προβολή).

Είπαμε ότι (1) $\boxed{\underbrace{z_n}_{\in\mathbb{C}} \to \infty}$: $\Leftrightarrow \forall\, r>0 : \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ \forall\, n\geq n_0 : \underbrace{|z_n|>r}_{z_n\in \underbrace{\dot{D}(\infty,r)}_{=\{z\in\mathbb{C} : |z|>r\}}}$

$\Leftrightarrow \underbrace{|z_n|}_{\in\mathbb{R}} \to +\infty$

$= \{z\in\tilde{\mathbb{C}}\setminus\{\infty\} : |z|>r\}$

$\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

«τρύπιος» κυκλικός δίσκος με κέντρο το ∞.

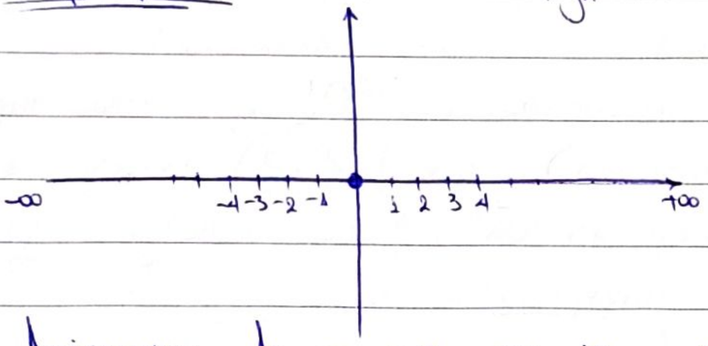
$\underset{(z_n)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{|z_n|} \to 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{1}{z_n} \to 0}$

(2) Στο $\mathbb{R}$ έχουμε $+\infty$, $-\infty$ με $x_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall r\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0 : x_n > r$

$x_n \to -\infty \Leftrightarrow$ —//— $x_n < -r$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$, τότε $|x_n - y_n| = x_n - y_n \to +\infty$



<u>Αντίστοιχα:</u> Αν $z_n = n$ και $w_n = -n$, τότε έχουμε $z_n \to \infty$ (στο $\mathbb{C}$) και $w_n \to \infty$ (στο $\mathbb{C}$)

όπου, επίσης $|z_n - w_n| = 2n \to +\infty$.

Άρα, «τι παίζει» για δύο ακολουθίες στο $\mathbb{C}$ που η Ευκλείδεια απόσταση των όρων τους μεγαλώνει, τελικά «πάνε» στο ίδιο «όριο», το ∞;

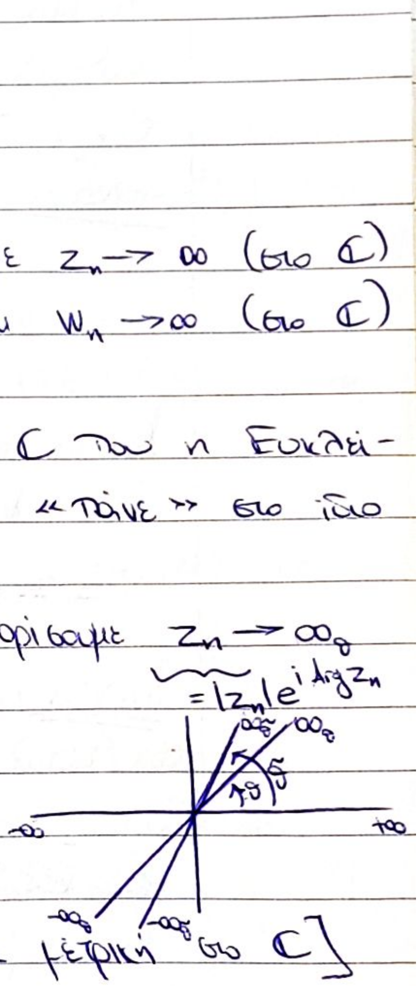
[Θα μπορούσαμε πράγματι $\forall\, \theta\in(-\pi,\pi]$ να ορίσουμε $\underbrace{z_n}_{=|z_n|e^{i\operatorname{Arg} z_n}} \to \infty_\theta$

(π.χ. για $\theta=0$: $\infty_0 = +\infty$

για $\theta=-\pi$: $\infty_{-\pi} = -\infty$)

ως : $e^{i(\operatorname{Arg} z_n - \theta)} \to 1$ και $|z_n| \to +\infty$

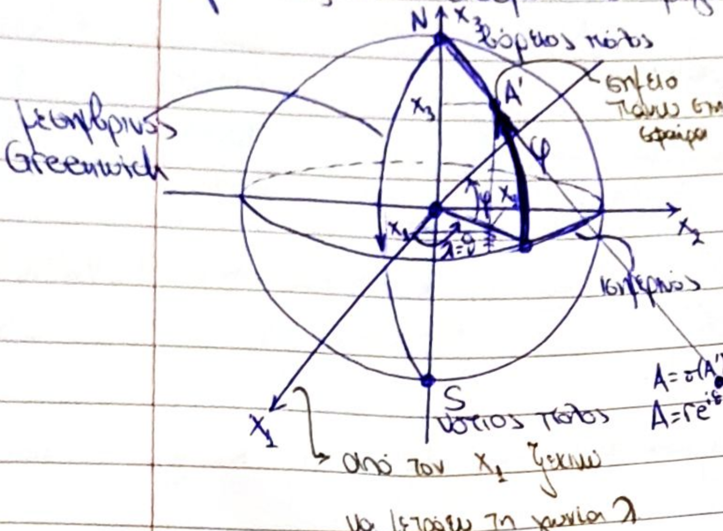
Αυτή η μη χρησιμοποιούμενη έννοια του απείρου είναι διαισθητικά πιο συμβατή με την Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$]



Η έννοια του ∞, ως κατ' εξοχήν σημείου του επεκτ. μιγ. επιπ. $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ προκύπτει μέσω της <u>στερεογραφικής προβολής</u>.

Χρησιμοποιείται στην Γεωγραφία, Χαρτογρ., Αστρονομία.
Καλύτερα ορίζεται με τις γεωγραφικές συντεταγμένες.

Θεωρούμε μια σφαίρα $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ με ακτίνα 1 κέντρο $O=(0,0,0)$ όπου για $x_3=0$ έχουμε το μιγαδικό επίπεδο.



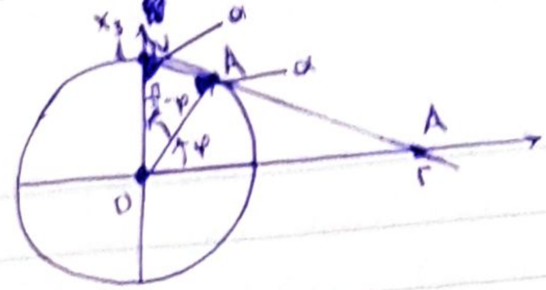
Η σφαίρα αυτή (λέγεται και σφαίρα του Riemann) αντιστοιχεί στην επιφάνεια της Γης. Κάθε $A' \in S^2\setminus\{N\}$ ορίζεται από το γεωγραφικό μήκος $\lambda \in (-\pi,\pi]$ [για $\lambda=0$ ορίζεται η τομή του επιπέδου $(1,0,0)$, O, N ως μεσημβρινός Greenwich για $\lambda=\pi$, η International Date Line].

Η τομή του επιπέδου παράλληλα στο $O_{x_1x_2}$ που περιέχει το A' καθορίζει τη γωνία (προσανατ.) $\varphi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ μεταξύ του επιπέδου $O_{x_1x_2}$ και του διανύσματος $\overrightarrow{OA'}$, και ονομάζεται γεωγραφικό πλάτος [για $\varphi=0$: ισημερινός
$\varphi=\frac{\pi}{2}$: βόρειος πόλος
$\varphi=-\frac{\pi}{2}$: νότιος πόλος]

Αν το επίπεδο του ισημερινού $O_{x_1x_2}=\mathbb{C}$, τότε:
$$\forall A'\in S\setminus\{N\} \quad \exists \quad A=\underset{\substack{\uparrow \\ \text{στερεογρ. προβολή}}}{\sigma}(A')\in\mathbb{C}$$

Δηλαδή: Έστω $A'\in S^2\setminus\{N,S\}$. Τότε $\exists\,(\varphi,\lambda)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(-\pi,\pi]$ και έστω $\sigma(A')=A=r\cdot e^{i\theta}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ με $(r,\theta)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$
[Ισχύει: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{η σχέση του } \lambda \\ \text{με το } \theta}}{\lambda=\theta}$] Αυτή η απεικόνιση είναι 1-1 και επί από τη σφαίρα στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Πώς προκύπτει η σχέση του r με το φ;
Ας δούμε την τομή της σφαίρας με το ημιεπίπεδο που περιέχει τον μεσημβρινό $\lambda=\theta$. Αυτό το ημιεπίπεδο περιέχει και την ημιευθεία NA'A ($\Rightarrow \lambda=\theta$). Η τομή είναι πάνω στο ημιεπίπεδο $\lambda=\theta$.]



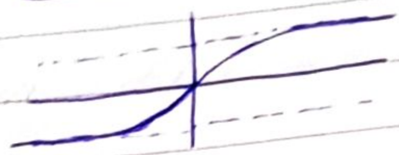
$\tan a = \frac{r}{1}$

όπου $\frac{\pi}{2} - \varphi + 2a = \pi$

$\iff a = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$

$\Rightarrow \boxed{r = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \longleftrightarrow \boxed{2\arctan r - \frac{\pi}{2} = \varphi}$, όπου

$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Με αυτή την αντιστοιχία παρατηρούμε ότι:

Για $(z_n) \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ με $\underbrace{z_n}_{=r_n e^{i\theta_n}} \longrightarrow \infty \iff r_n = |z_n| \to +\infty$

αντιστοιχεί μια ακολουθία σημείων πάνω στη σφαίρα που τείνει στο N $(\varphi_n, \lambda_n) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi]$ με

$\underbrace{\varphi_n = 2\arctan \underbrace{r_n}_{\to +\infty}}_{\to \frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$, και αντίστοιχα:

αν $\varphi_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\varphi_n \to \frac{\pi}{2}$, τότε για την εικόνα στο μιγ. επίπ. της (φ_n) έχουμε: $0 < r_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2}\right) \to +\infty$

$\Rightarrow$ Μέσω της στερεογρ. προβολής σ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κατά συνεχή τον βόρειο πόλο $N \in S^2$ με το $\infty \in \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

και να επεκτείνουμε την στερεογρ. προβολή στην $\sigma : S^2 \to \tilde{\mathbb{C}}$, με $\sigma(S^2\setminus\{N\}) = \mathbb{C}$ και $\sigma(N) = \infty$.

Αυτό έχει τοπολογικές και γεωμετρικές συνέπειες,

π.χ. επιτρέπει να ορίσουμε μετρική στο $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ως:

$\underbrace{|A - B|}_{\in \mathbb{C}} = \|\underbrace{\sigma^{-1}(A)}_{=A'} - \underbrace{\sigma^{-1}(B)}_{=B'}\|$ ← Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^3$ (χορδική απόσταση)

και το επεκτείνουμε στο ∞ με: $|A - \infty| = \|A' - N\|$

Μέσω της σ σημεία στο νότιο ημισφ. $(\varphi < 0)$ αντιστοιχούν σε σημεία στο εσωτερικό του μοναδιαίου κυκλ. δίσκου στο $\mathbb{C}$ και σημεία ~~στο μοναδ. κύκλο~~ του βορείου $(\varphi > 0)$ στο εξωτερικό του μοναδιαίου κυκλ. δίσκου στο $\mathbb{C}$.

σημεία στον μοναδιαίο κύκλο αντιστοιχούν στον ισημερινό.
Αν απεικονίσουμε τη σφαίρα στον εαυτό της μέσω κατοπτρισμού στο επίπεδο του ισημ. (μιγ. επίπεδο), δηλαδή $(\varphi, \lambda) \longmapsto (-\varphi, \lambda)$
~~η οποία~~ αυτή στο μιγ. επίπεδο αντιστοιχεί στην απεικόνιση η οποία με τη σειρά της απεικονίζει το εσωτ. στο εξωτ. $z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{\|z\|^2}$

του μοναδ. κύκλου και αντίστροφα, αφού: $\left|\frac{z}{|z|^2}\right| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{|z|}$

$\hookrightarrow$ ή z;

Η πιο πάνω αντιστοιχία, της $(\varphi, \lambda) \longmapsto (-\varphi, \lambda)$ με την $z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$ προκύπτει ως εξής:

(φ, λ) αντιστοιχεί στο $z = r \cdot e^{i\vartheta}$ $\left(\vartheta = \lambda, \ r = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$
$(-\varphi, \lambda)$ .... $w = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\left(\vartheta = \lambda, \ \rho = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right)$

όπου: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + b\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - b\right) = 1$ και συνεπώς:

$$w \cdot \bar{z} = \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}_{=|w|} \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}_{=|\bar{z}|} \underbrace{e^{i\vartheta}}_{\arg w} \underbrace{e^{-i\vartheta}}_{\arg(\bar{z})} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{\bar{z}}$$

30/03/2019

ΚΕΦ. 3: Ολόμορφες συναρτήσεις

Ορισμός: Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, και $z_0 \in D$
$f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0
αν υπάρχει το όριο:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

το οποίο τότε:
ονομάζεται μιγαδική παράγωγος της f στο z_0 (ή $\mathbb{C}$-παράγωγος).
Αν η f είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη σε κάθε $z_0 \in D$, τότε η $f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται ολόμορφη, και αν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε η $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$